Лекція № 32

Продовжуємо вивчення електростатики провідників.

Густина поверхневих зарядів не може бути задана довільно. Вона виражається формулою

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_s \tag{10.11}$$

і залежить від розташування, форми, та заряду <u>всіх</u> провідників системи разом і даним провідником.

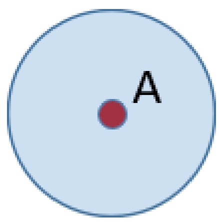
Для визначення поля у просторі між провідниками треба задати або потенціали провідників, або їхні повні заряди.

Повний заряд провідника визначається так:

$$Q = \iint_S \sigma dS = \frac{1}{4\pi}\iint_S E_n dS = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS. \tag{10.12}$$

Важливою особливістю електростатичного потенціалу є те, що він може досягати максимального (або мінімального) значення тільки на границях області поля. Це означає неможливість стійкої рівноваги пробного заряду, бо його енергія $e\varphi$ не має мінімуму.

Нехай в точці А знаходиться пробний точковий заряд. Розглянемо малу замкнену поверхню, що охоплює цей заряд (див. рис.).



Припустимо, що похідна від потенціалу на цій малій замкненій поверхні $\frac{\partial\varphi}{\partial n} < 0$. Візьмемо інтеграл по цій замкненій поверхні від $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$:

$$\oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \oint\!\!\!\oint_S d\vec{S}\nabla\varphi = \iiint_V (\nabla, \nabla\varphi) dV = \iiint_V \underbrace{\Delta\varphi}_{=0} dV = 0;$$

Потенціал задовольняє рівнянню Лапласа, тому інтеграл дорівнює нулю, припущення, що заряд оточує область із потенціалом меншим ніж потенціал в точці А є невірним. **Стійкої рівноваги в електростатичному полі не існує.**

10.2.2. Енергія електростатичного поля провідників. Електроємність

Скористаємось формулою для енергії електростатичного поля

$$w = \frac{1}{8\pi}\iiint \vec{E}^2 dV = -\frac{1}{8\pi}\iiint \left(\vec{E}, \nabla\varphi\right) dV;$$

$$\mathrm{div}(\varphi\vec{E}) = \varphi \underbrace{\mathrm{div}(\vec{E})}_{=0} + \left(\vec{E}, \nabla\varphi\right);$$

Можна представити енергію електростатичного поля провідників так:

$$w = -\frac{1}{8\pi}\iiint \mathrm{div}(\varphi\vec{E}) dV = \frac{1}{8\pi}\oiint_S \varphi\vec{E}d\vec{S};$$

Нехай провідників кілька та потенціал на поверхні провідника з номером a дорівнює φ_a (пам'ятаємо, що поверхня провідника є еквіпотенціальною):

$$w = \frac{1}{8\pi}\sum_a \oiint_S \varphi_a E_n dS = \frac{1}{8\pi}\sum_a \varphi_a \underbrace{\oiint_S E_n dS}_{4\pi q} = \frac{1}{2}\sum_a e_a\varphi_a.$$

Отримали формулу для енергії електростатичного поля провідників, яка співпадає з електростатичною енергією точкових зарядів:

$$w = \frac{1}{2}\sum_a e_a\varphi_a. \tag{10.13}$$

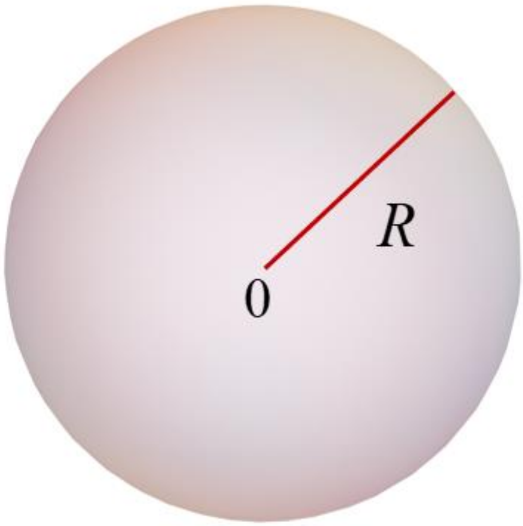
Заряди та потенціали провідників пов'язані лінійно, бо рівняння, яким вони задовольняють є лінійними й однорідними. Загальний вигляд такого лінійного зв'язку можна представити у вигляді

$$e_a = \sum_a C_{ab}\varphi_b. \tag{10.14}$$

Коефіцієнти пропорційності C_{aa}, C_{ab} мають розмірність довжини та залежать від форми та розташування провідників. Назви цих коефіцієнтів: C_{aa} – коефіцієнт ємності, C_{ab} – коефіцієнт електростатичної індукції. Можна показати, що $C_{ab} = C_{ba}$. Крім того, $C_{aa} > 0,\ C_{ab} < 0$.

Для одного провідника $e = C\varphi$. Тут C – електроємність провідника. В гаусовій системі одиниць електроємність вимірюється в сантиметрах та має порядок порядку розмірів провідника.

Електроємність провідної кулі радіусу R в гаусовій системі одиниць дорівнює її радіусу:



$$\varphi = \frac{e}{R}; \quad C = \frac{e}{\varphi} = R. \qquad (10.15)$$

10.2.3. Метод електростатичних зображень для розв’язання задач електростатики провідників

Ідея методу полягає у відшуканні таких «фіктивних» точкових зарядів зарядів всередині провідників, які б разом із даними зарядами забезпечили би виконання граничних умов на поверхні провідників. Поле провідників задовольняє рівнянню Лапласа, толе точкових зарядів також задовольняє цьому ж рівнянню

$$\Delta\varphi = 0.$$

Граничні умови на поверхні провідників

$$\varphi\big|_S = const.$$

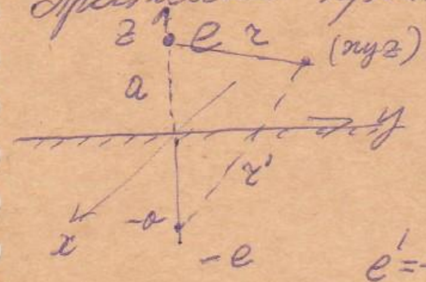
Проілюструємо метод електростатичних зображень на простих прикладах

1. <u>Точковий заряд над поверхнею заземленої нескінченної провідної поверхні</u>

Поле точкового заряду при наявності нескінченно провідної площини

$\varphi|_S = \mathrm{const}$. Метод ел. ст. зображень – знайти такі фіктивні точкові заряди, які б разом з даними зарядами і зображеннями б виконалась гр. умова (пов. провідників – еквіпотенціальні)

Простіший приклад: поле точкового заряду при наявності пров. площ.



$$\varphi|_{z=0} = 0;$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{e}{r} + \dfrac{e'}{r'}, & z \geq 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

$$e' = -e; \quad \varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'},$$

$$r = [x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{1/2}, \quad r' = [x^2 + y^2 + (z+a)^2]^{1/2}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi; \quad E_n\Big|_{z=0} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} = 4\pi\sigma; \quad \sigma = -\frac{e}{2\pi}\frac{a}{(\underbrace{x^2+y^2}_{r_0^2}+a^2)^{3/2}}$$

$$e' = \frac{1}{4\pi}\int E_n\,dS = -\frac{ea}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} \frac{r_0\,dr_0}{(r_0^2+a^2)^{3/2}} =$$

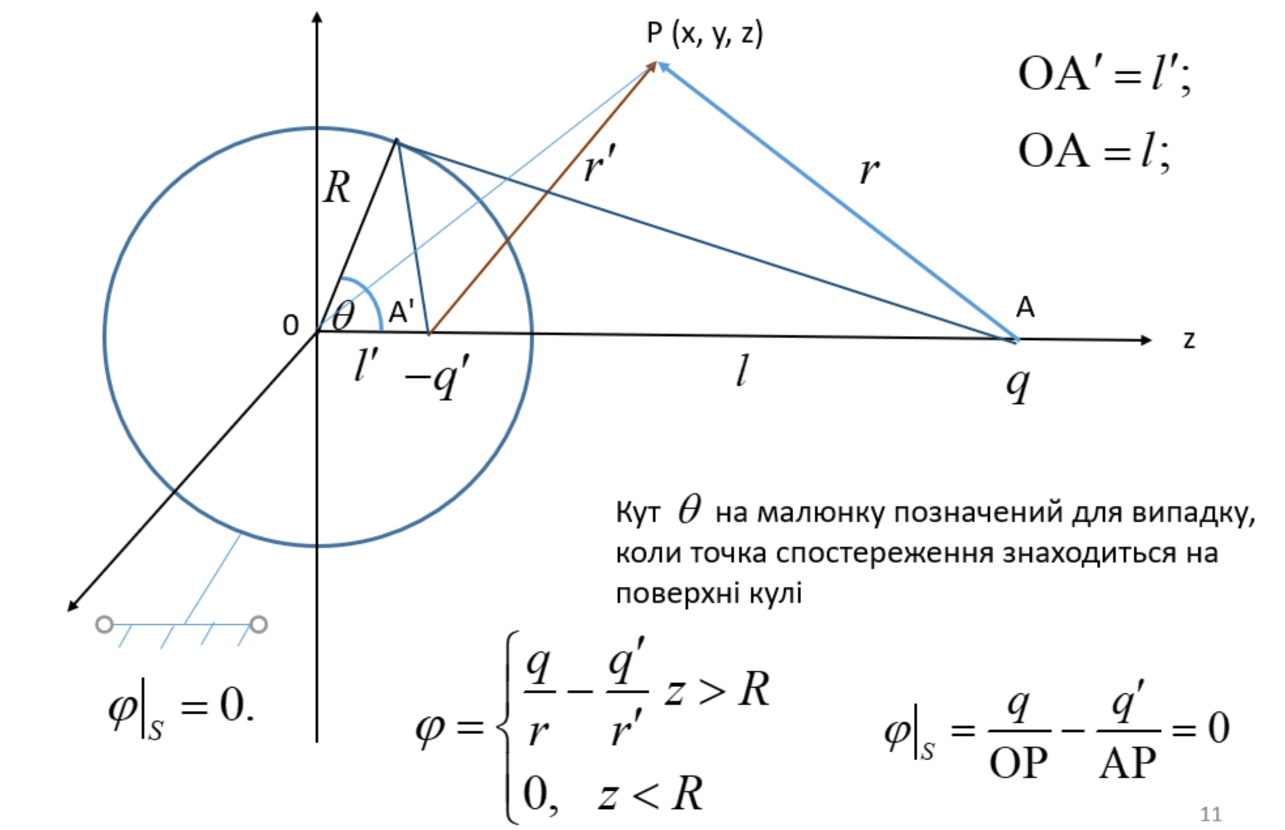
$$= ea\,\frac{1}{(r_0^2+a^2)^{1/2}}\Big|_0^{\infty} = -e,$$

$$F_{вз.} = -\frac{e^2}{4a^2}$$ – сила "зображення"

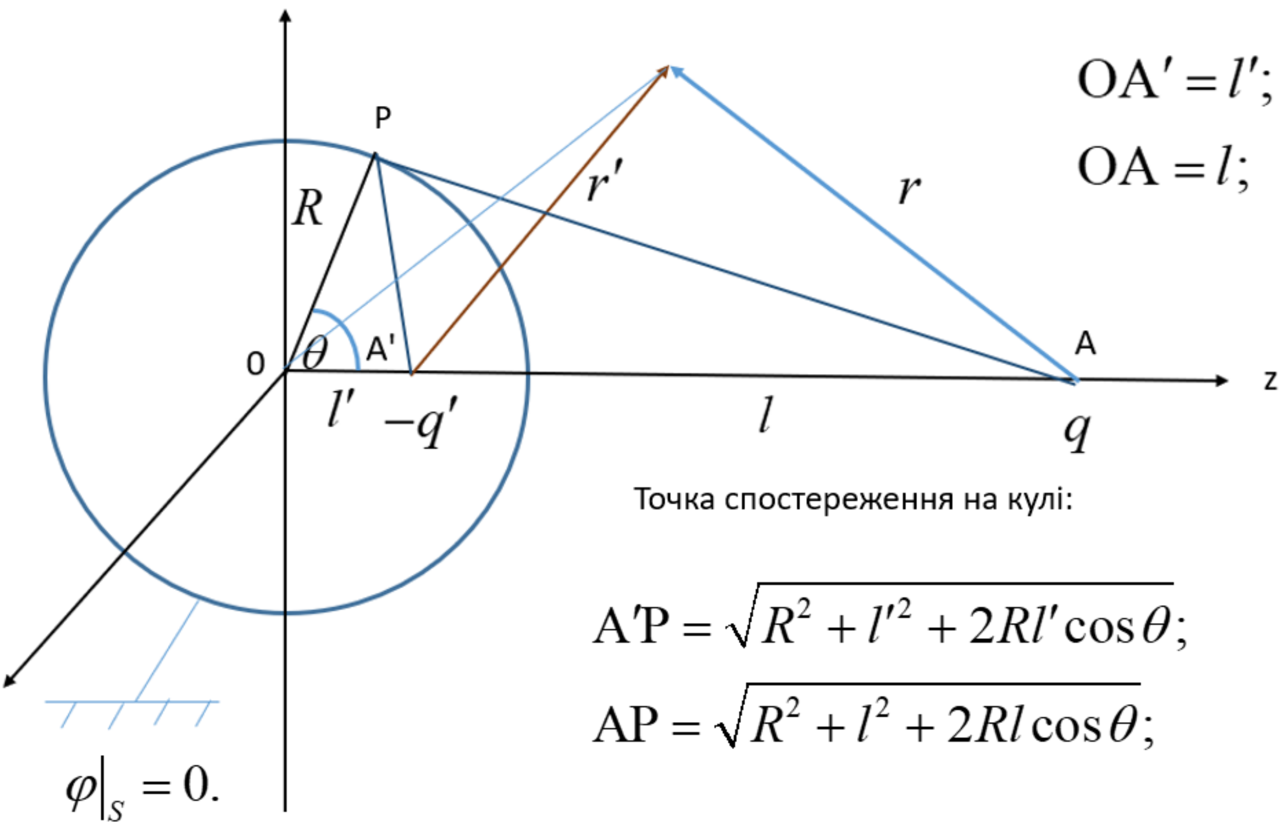
10

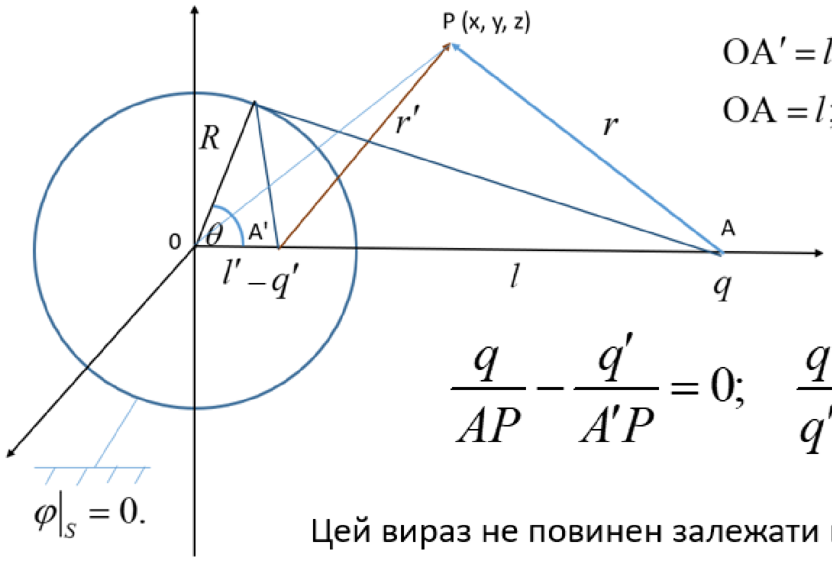
2. <u>Поле точкового заряду при наявності провідної кулі</u>

Помістимо «фіктивний» точковий заряд $-q'$ всередину кулі. Визначимо його величину та відстань від центру кулі $l' < R$ в залежності від величини реального заряду q та його відстані від центру кулі $l > R$.



За умови, що точка спостереження P знаходиться на поверхні кулі маємо такі співвідношення





$\mathrm{OA}' = l';$

$\mathrm{OA} = l;$

$$\frac{q}{AP} - \frac{q'}{A'P} = 0; \quad \frac{q}{q'} = \frac{AP}{A'P};$$

Цей вираз не повинен залежати від кута θ

$$\left(\frac{q}{q'}\right)^2 = \frac{R^2 + l^2 + 2Rl\cos\theta}{R^2 + l'^2 + 2Rl'\cos\theta}.$$

$$\left(\frac{e}{e'}\right)^2 = \frac{\dfrac{R^2}{l} + l - 2R\cos\theta}{\dfrac{R^2}{l'} + l' - 2R\cos\theta} \cdot \left(\frac{l}{l'}\right)$$

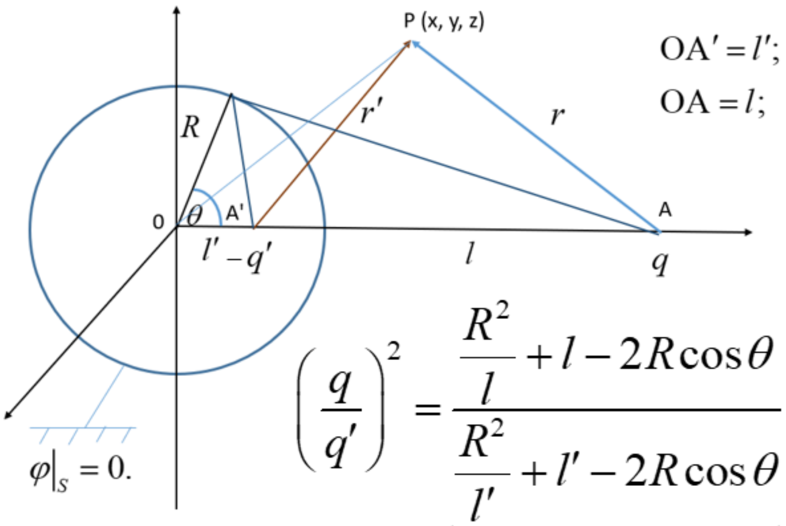
Виконано за умови

$$R^2 = l \cdot l'$$

Гранична умова на поверхні повинна виконуватись при будь-якому значенні кута θ. Це можливо тільки, якщо дорівнює одиниці ця дріб:

$$\frac{\dfrac{R^2}{l} + l - 2R\cos\theta}{\dfrac{R^2}{l'} + l' - 2R\cos\theta} = 1;$$

$$l' = \frac{R^2}{l}; \quad l = \frac{R^2}{l'}; \quad ll' = R^2.$$



$$OA' = l'; \quad OA = l;$$

$$\left(\frac{q}{q'}\right)^2 = \underbrace{\frac{\frac{R^2}{l} + l - 2R\cos\theta}{\frac{R^2}{l'} + l' - 2R\cos\theta}}_{=1} \cdot \left(\frac{l}{l'}\right); \quad \left(\frac{q}{q'}\right)^2 = \frac{l}{l'};$$

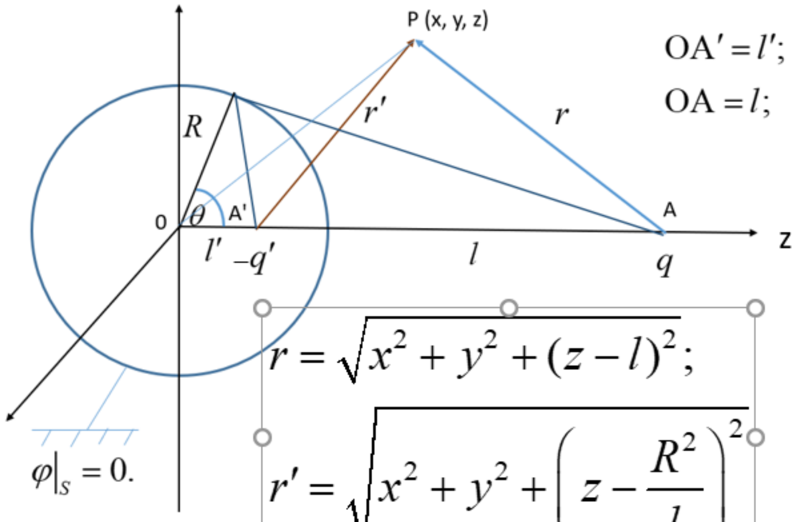
$$\left(\frac{q}{q'}\right)^2 = \left(\frac{l}{R}\right)^2.$$

Фіктивний заряд

$$q' = -\frac{qR}{l} \qquad l' = \frac{R^2}{l};$$

14

Отримали:



$$OA' = l'; \quad OA = l;$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{r} - \frac{q'}{r'} & z > R \\ 0, & z < R \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-l)^2};$$

$$r' = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{R^2}{l}\right)^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{r} - \frac{qR}{l'r'} & z > R \\ 0, & z < R \end{cases}$$

Потенціал

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{r} - \dfrac{qR}{l'r'} \; z > R; \\ 0, \quad z < R, \end{cases} \tag{10.16}$$

де

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-l)^2};$$

$$r' = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{R^2}{l}\right)^2}.$$

Силу взаємодії між зарядом та зображенням

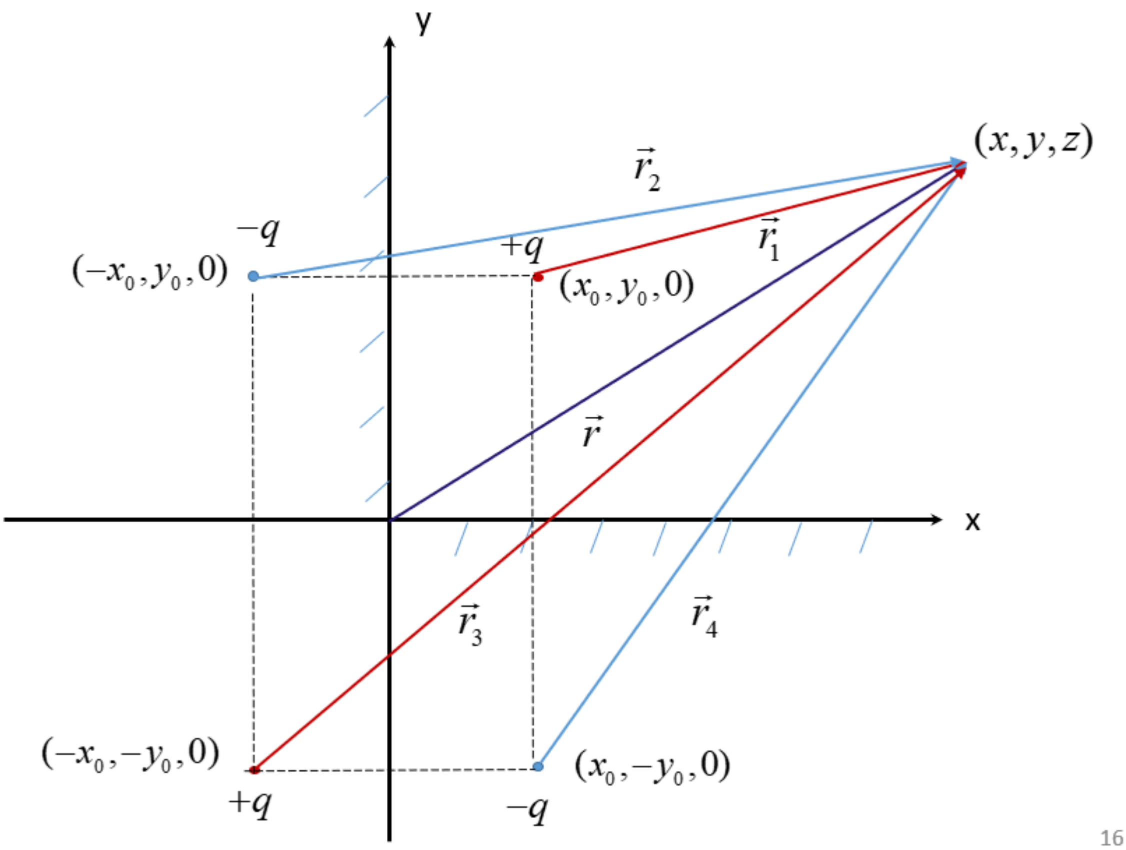
$$F_{вз} = -\frac{qq'}{(l-l')^2} = -\frac{q^2 Rl}{\left(l^2 - R^2\right)}. \tag{10.17}$$

Можна за формулою

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R}$$

Знайти розподіл заряду по поверхні кулі.

3. <u>Двогранний кут між двома заземленими провідними площинами дорівнює 90°. Всередині кута знаходиться точковий заряд q. Методом електростатичних зображень знайти потенціал φ електричного поля</u>



Будуємо потенціал, який створюють в точці спостереження чотири заряди (див. рис.)

$$\varphi = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} + \frac{q}{r_3} - \frac{q}{r_4},$$

де

$$r_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2};$$
$$r_2 = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2};$$
$$r_3 = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 + z^2};$$
$$r_4 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 + z^2};$$

Розподіл зарядів по вертикальній напівплощині знаходимо так:

$$\sigma(y, z) = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Розподіл зарядів по горизонтальній напівплощині визначається, як

$$\sigma(x, z) = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

10.2.4. Електростатичне поле в діелектрику

Основною властивістю діелектриків (ізоляторів) є відсутність вільних зарядів та неможливість протікання струму. Електростатичне поле всередині діелектриків не дорівнює нулю.

Усереднимо рівняння Максвелла для постійного електричного поля для діелектричного середовища. Ствердження, які застосували для електростатики провідників $\overline{\vec{H}} = \vec{B} = 0,\ \vec{j} = 0$ виконуються й для діелектриків. Рівняння Максвелла для діелектрика при умові існування тільки наведених зарядів (зовнішніх немає) є такими:

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\vec{E} = 0; \\ &\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho. \end{aligned} \tag{10.18}$$

Оскільки зовнішніх зарядів немає, то повний заряд в усьому діелектрику дорівнює нулю для тіла будь якої форми та розмірів. Інтеграл по довільному об’єму, всередині якого знаходиться досліджуваний діелектрик дорівнює нулю:

$$\iiint\limits_V \rho dV = 0.$$

Цю умову можна виконати тільки за умови, що

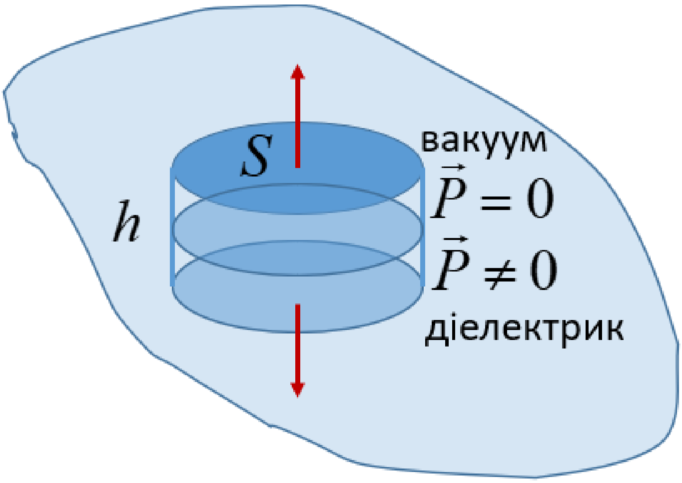
$$\rho = -\mathrm{div}\vec{P}. \tag{10.19}$$

Маємо

$$\iiint\limits_V \rho dV = -\iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{P} dV = \oiint\limits_S \vec{P} d\vec{S} = 0.$$

Вважаємо, що зовні від діелектрику зарядів немає, тому на поверхні інтегрування $\vec{P} = 0$. Всередині діелектрика цей вектор може бути ненульовим. Вектор $\vec{P}$ називається вектором діелектричної поляризації. Якщо всередині діелектрику $\vec{P} \neq 0$, кажуть, що діелектрик поляризований. Вектор поляризації визначає поверхневу густину заряду.

Розглянемо граничні умови між вакуумом та діелектриком (див. рис.)



Рахуємо інтеграл по нескінченно малому об'єму, вказаному на рис.:

$$\iiint_V \rho dV = -\iiint_V \mathrm{div}\vec{P}dV = -\oiint_S \vec{P}d\vec{S};$$

$$\rho Sh = -\oiint_S \vec{P}d\vec{S} = P_n S;$$

$$\rho \cancel{S} h = P_n \cancel{S};\quad \lim_{h\to 0}(\rho h) \to \sigma;$$

Отримали граничну умову

$$P_n\big|_S = \sigma. \tag{10.20}$$

Знайдемо фізичне значення вектору поляризації $\vec{P}$. Для цього розрахуємо повний дипольний момент всіх зарядів, які є всередині діелектрика:

$$\vec{d}_{\text{діп.}} = \iiint_V \rho\vec{r}dV = -\iiint_V \vec{r}\,\mathrm{div}\vec{P}dV;$$

Множимо обидві частини скалярно на довільний сталий вектор $\vec{C}$ та застосовуємо теорему Гауса:

$$\left(\vec{C},\vec{d}_{\text{діп.}}\right) = -\iiint_V \left(\vec{C},\vec{r}\right)\mathrm{div}\vec{P}dV;$$

$$\mathrm{div}\left(\left(\vec{C},\vec{r}\right)\vec{P}\right) = \left(\vec{C},\vec{r}\right)\mathrm{div}\vec{P} + \left(\vec{C},\vec{P}\right);$$

$$\left(\vec{C},\vec{r}\right)\mathrm{div}\vec{P} = \mathrm{div}\left(\left(\vec{C},\vec{r}\right)\vec{P}\right) - \left(\vec{C},\vec{P}\right);$$

$$\left(\vec{C},\vec{d}_{\text{діп.}}\right)=-\iiint\limits_V\left[\operatorname{div}\left(\left(\vec{C},\vec{r}\right)\vec{P}\right)-\left(\vec{C},\vec{P}\right)\right]dV=-\iiint\limits_V\operatorname{div}\left(\left(\vec{C},\vec{r}\right)\vec{P}\right)dV+\iiint\limits_V\left(\vec{C},\vec{P}\right)dV;$$

$$\left(\vec{C},\vec{d}_{\text{діп.}}\right)=\underbrace{\oiint\limits_S\left(\vec{C},\vec{r}\right)\vec{P}d\vec{S}}_{=0}+\iiint\limits_V\left(\vec{C},\vec{P}\right)dV;$$

$$\left(\vec{C},\vec{d}_{\text{діп.}}\right)=\left(\vec{C},\iiint\limits_V\vec{P}dV\right);$$

$$\vec{d}_{\text{діп.}}=\iiint\limits_V\vec{P}dV.$$

Вектор поляризації є електричним дипольним моментом одиниці об'єму діелектрика

$$\vec{d}_{\text{діп.}}=\iiint\limits_V\vec{P}dV. \tag{10.21}$$

В дивергентне рівняння Максвелла в (10.18) підставимо (10.19).

$$\operatorname{div}\vec{E}=-4\pi\operatorname{div}\vec{P};$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{E}+4\pi\vec{P}\right)=0.$$

Введемо вектор електричної індукції:

$$\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}. \tag{10.22}$$

Отримуємо рівняння Максвелла у діелектрику в разі відсутності зовнішніх зарядів:

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{E}=0;\\ \operatorname{div}\vec{D}=0.\end{cases} \tag{10.23}$$

При наявності зовнішніх зарядів рівняння приймають вигляд

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{E}=0;\\ \operatorname{div}\vec{D}=4\pi\rho_{ext}.\end{cases} \tag{10.24}$$

Граничні умови на границі діелектрик–провідник:

$$\vec{E}_t\Big|_S=0;\quad D_n=4\pi\sigma. \tag{10.25}$$

Граничні умови на границі двох діелектриків за відсутності зовнішніх поверхневих зарядів:

$$\vec{E}_{1t}\Big|_S=\vec{E}_{2t}\Big|_S;\quad D_{1n}\Big|_S=D_{2n}\Big|_S. \tag{10.26}$$

Граничні умови на границі двох діелектриків за наявності зовнішніх поверхневих зарядів:

$$\vec{E}_{1t}\Big|_S = \vec{E}_{2t}\Big|_S; \quad D_{2n}\big|_S - D_1\big|_S = 4\pi\sigma_{ext}. \tag{10.27}$$

Ці формули ми вже фактично виводили в розділі 5.8.

10.2.4. Діелектрична сприйнятливість та діелектрична проникність

В ізотропному діелектрику електрична індукція та напруженість електричного поля пропорційні, так само, як напруженість та вектор поляризації:

$$\begin{gathered} \vec{D} = \varepsilon\vec{E}; \quad \vec{P} = \chi\vec{E}; \\ \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1+4\pi\chi)\vec{E}; \\ \varepsilon = 1 + 4\pi\chi. \end{gathered} \tag{10.28}$$

ε – діелектрична проникність, χ – діелектрична сприйнятливість.

В анізотропному діелектрику:

$$\begin{gathered} D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta; \quad P_\alpha = \chi_{\alpha\beta}E_\beta; \\ \varepsilon_{\alpha\beta} = 1 + 4\pi\chi_{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{10.29}$$

Відповідні тривимірні тензори другого рангу є симетричними:

$$\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\beta\alpha}; \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}.$$

Напишемо граничні умови через напруженість для границі двох ізотропних діелектриків:

$$\vec{E}_{1t}\Big|_S = \vec{E}_{2t}\Big|_S; \quad \varepsilon_1 E_{1n}\big|_S = \varepsilon_2 E_{2n}\big|_S. \tag{10.30}$$

Тангенціальні компоненти напруженості є неперервними, а нормальні мають стрибок.

Якщо введено електростатичний потенціал $\vec{E} = -\nabla\varphi$, то

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon\nabla\varphi\right) = 0;$$

$$\varphi_1\big|_S = \varphi_2\big|_S; \quad \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\bigg|_S = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\bigg|_S.$$

Заряд всередині діелектрика:

$$\rho = -\mathrm{div}\vec{P}; \quad \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{D}; \quad \vec{P} = \chi\vec{E} = \frac{\chi}{\varepsilon}\vec{D};$$

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon}\vec{D};$$

$$\rho = -\mathrm{div}\left(\left(\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\right)\vec{D}\right) = -\left(\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\right)\underbrace{\mathrm{div}\vec{D}}_{=0} + \vec{D}\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\right);$$

$$\rho = \vec{D}\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{D}}{\varepsilon^2}\nabla\varepsilon = -\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{E}}{\varepsilon}\nabla\varepsilon.$$

В однорідному середовищі з постійною діелектричною проникністю об’ємного заряду немає.